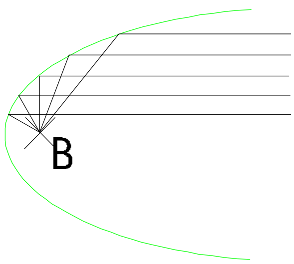
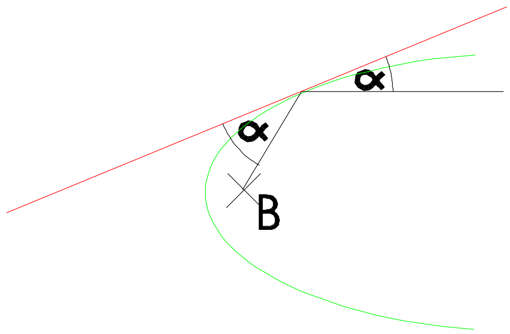
Unterrichtsreihe zur Parabel

Übersicht: 1. Einstieg: Satellitenschüssel
2.Konstruktion einer Kurve, bei der alle Parallelstrahlen in einen Punkt reflektiert werden
3. Vermutung, daß es sich um eine Parabel handelt
4. Konstruktion einer Parabel mit Leitgerade und Brennpunkt
5. Beschreibung dieser Punktmenge
6. Konstruktion von Tangenten
7. Beweis der "Brennpunkteigenschaft" einer Parabel
8. Wiederholungen und Ergänzungen zum Thema Parabel

Zu 1.: Eine Satellitenschüssel hat die Eigenschaft, daß Parallelstrahlen alle in einen Punkt reflektiert werden. Dieser Punkt heißt Brennpunkt. Bei einem Scheinwerfer ist der Lichtweg genau umgekehrt: Alle Strahlen gehen von einem Punkt aus und werden dann parallel reflektiert.



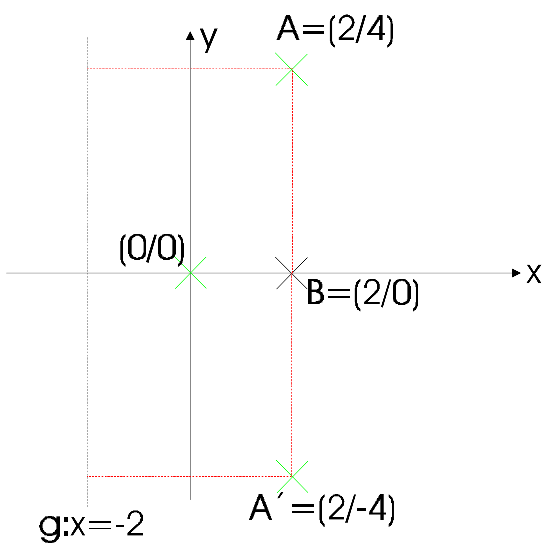


Bei der Spiegelung an einer Geraden bzw. an einer ebenen Fläche gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel. An einer krummlinigen Fläche bildet man für jeden Punkt eine Tangente und reflektiert an dieser. Da Tangenten Geraden sind, gilt das Reflexionsgesetz.

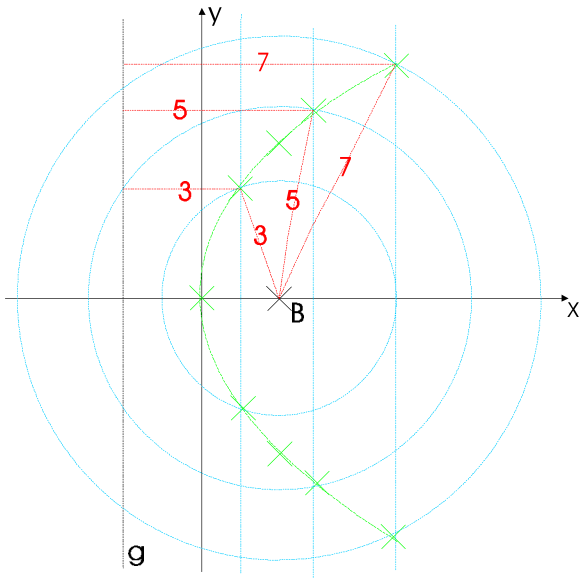
Erste Annahme: Ein Kreis erfüllt die Bedingung: Diese Annahme hat sich als falsch erwiesen, da bei einem Kreis alle Tangenten senkrecht zum Radius sind, und somit jeder Mittelpunktsstrahl wieder in sich selbst reflektiert wird, während alle anderen Strahlen nicht in den Mittelpunkt reflektiert werden können.

Zu 2.: Geometrische Konstruktion einer Kurve: Durch Anwendung des Brechungsgesetzes war es uns möglich, zu jedem einfallendem Strahl eine Tangente zu konstruieren, so daß der reflektierte Strahl durch den Mittelpunkt verläuft. Die so entstehende Kurve legt die Vermutung nahe, daß es sich um eine Parabel handelt. Die Tatsache, daß Satellitenschüsseln auch Parabolspiegel heißen, stützt die Vermutung.

Zu 3.: Konstruktion einer Parabel
Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt B.
Gesucht sind alle Punkte, die von der Geraden g und dem Punkt B den gleichen Abstand haben. g heißt Leitgerade, B heißt Brennpunkt. Konkretes Zahlenbeispiel: g: x=-2 ; B= (2/0)

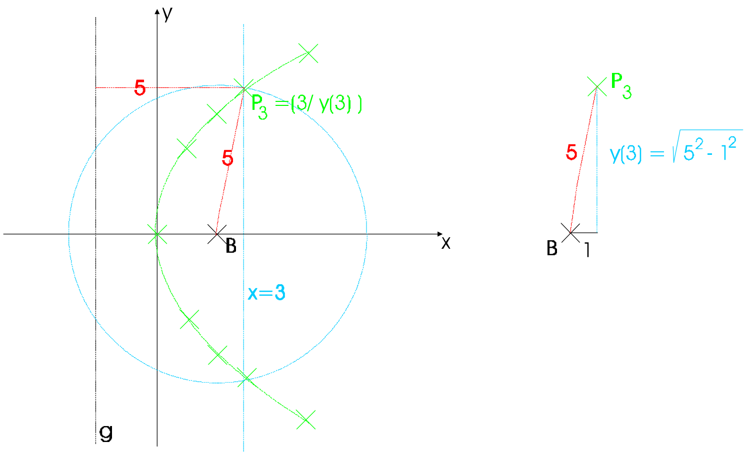


Bei den Punkten (0/0) A= (2/4) und A´= (2/-4) erkennt man in der oben stehenden Skizze direkt, daß sie die Bedingung erfüllen. Weitere Punkte kann man konstruieren, indem man einen Abstand wählt(z.B.3), und dann einen Kreis mit diesem Abstand 3 um B zeichnet und eine Gerade mit diesem Abstand 3 von g zeichnet. Alle Punkte auf der Geraden haben den Abstand 3 von g, alle Punkte auf dem Kreis haben den Abstand 3 von B. Der Schnittpunkt erfüllt beide Bedingungen, er hat also den gleichen Abstand von g und B. In der unten stehenden Skizze findet sich die Konstruktion für die Abstände 3; 5 und 7.

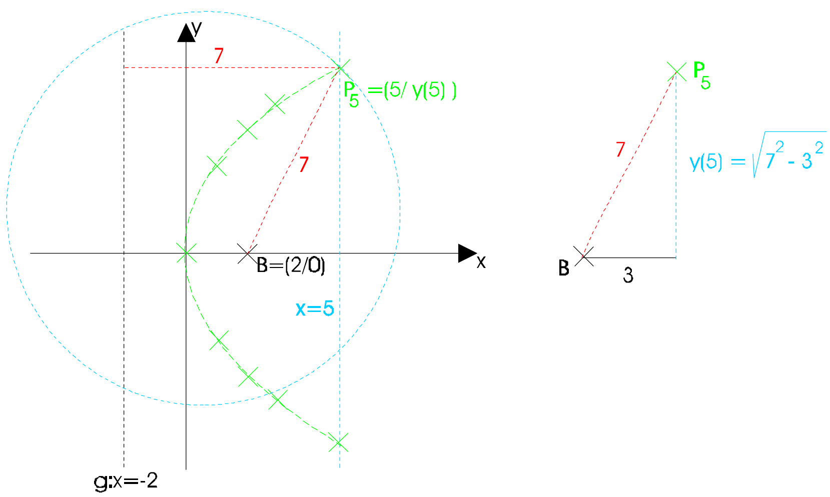


Zu 5.: Nun interessieren die Koordinaten der Punkte. Diese lassen sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

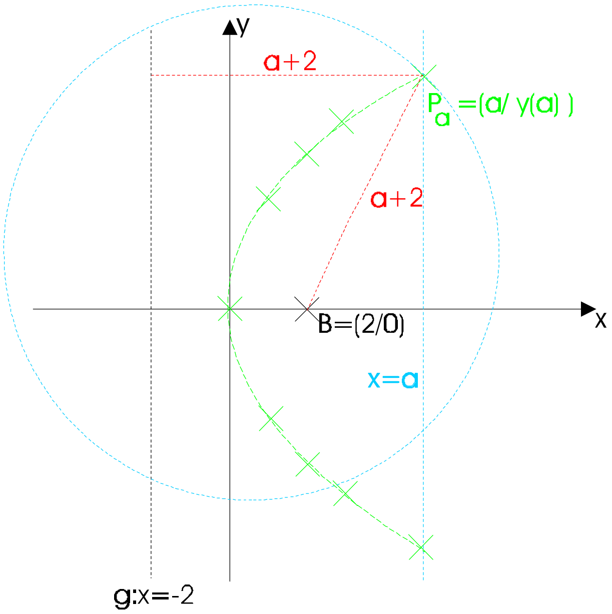
Für den Abstand 5 ergibt sich aus der Zeichnung $P_3 = \left(3 \middle| \sqrt{5^2 - 1^2}\right)$.

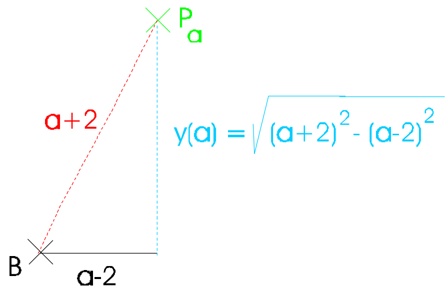


Für den Abstand 7 ergibt sich aus der Zeichnung $P_5 = \left(5 \middle| \sqrt{7^2 - 3^2}\right)$.



Für den Abstand a+2 ergibt sich aus der Zeichnung $P_a = \left(a \middle| \sqrt{(a+2)^2-(a-2)^2}\right)$.

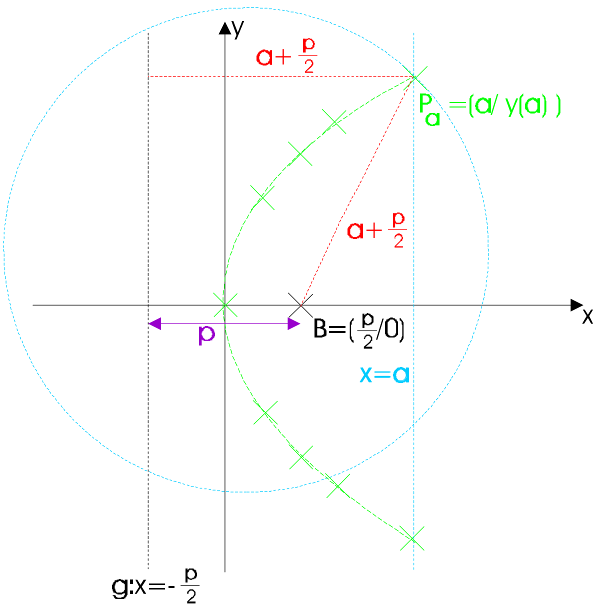


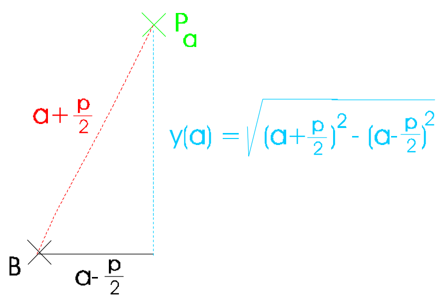


Da $\sqrt{(a+2)^2-(a-2)^2} = \sqrt{a^2+2a2+4-a^2+2a2-4} = \sqrt{8a}$, folgt $\boxed{P_a = \left(a\middle|\sqrt{8a}\right)}$.

Die durch g: x=-2 und B = (2/0) konstruierte Menge läßt sich also beschreiben durch die Menge aller Punkte (a/b) für die gilt $b = \sqrt{8a}$.

Mathematisch wird diese Menge bezeichnet durch $\boxed{P = \left\{\left(a|b\right) \middle| \, b = \sqrt{8a}\right\} = \left\{\left(x|y\right) \middle| \, y = \sqrt{8x}\right\}}$.





Diese Beschreibung gilt für g.x=-2 und B=(2/4). Im allgemeinen Fall gibt man den Abstand von B zur Geraden B mit p an. Somit gilt für die Leitgerade g: x=-$\frac{p}{2}$ und für die Koordinaten des Punktes B = ($\frac{p}{2}$ / 0). Mit folgender Rechnung $\sqrt{\left(a+\frac{p}{2}\right)^2-\left(a-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{2pa}$ ergibt sich die Punktmenge $\boxed{P = \left\{\left(a|b\right) \middle| \, b = \sqrt{2pa}\right\} = \left\{\left(x|y\right) \middle| \, y = \sqrt{2px}\right\}}$