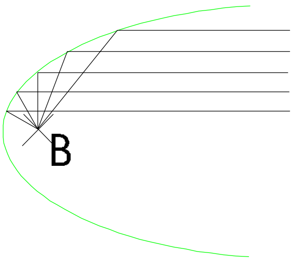
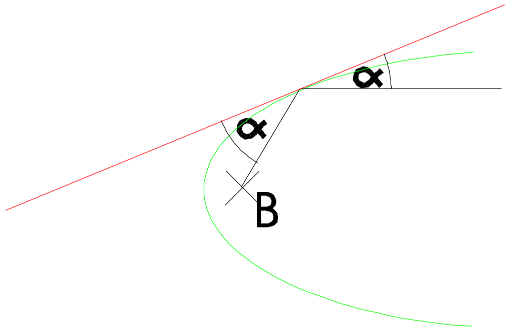
Unterrichtsreihe zur Parabel

Übersicht: 1. Einstieg: Satellitenschüssel
2. Konstruktion einer Parabel mit Leitgerade und Brennpunkt
3. Beschreibung dieser Punktmenge
4. Konstruktion von Tangenten
5. Beweis der "Brennpunkteigenschaft" einer Parabel
6. Wiederholungen und Ergänzungen zum Thema Parabel

Zu 1.: Eine Satellitenschüssel hat die Eigenschaft, daß Parallelstrahlen alle in einen Punkt reflektiert werden. Dieser Punkt heißt Brennpunkt. Bei einem Scheinwerfer ist der Lichtweg genau umgekehrt: Alle Strahlen gehen von einem Punkt aus und werden dann parallel reflektiert.



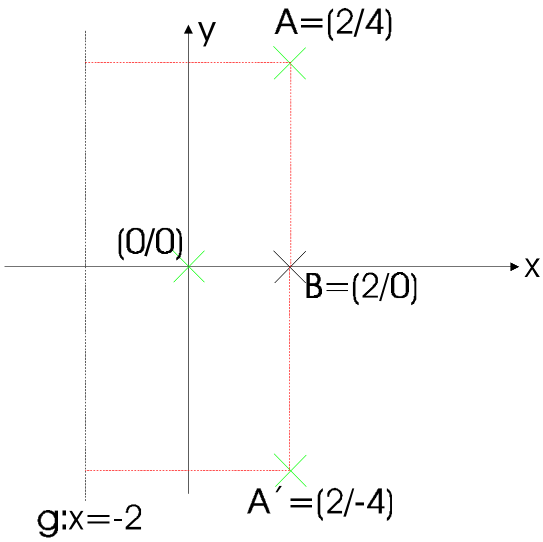


Bei der Spiegelung an einer Geraden bzw. an einer ebenen Fläche gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel. An einer krummlinigen Fläche bildet man für jeden Punkt eine Tangente und reflektiert an dieser. Da Tangenten Geraden sind, gilt das Reflexionsgesetz.

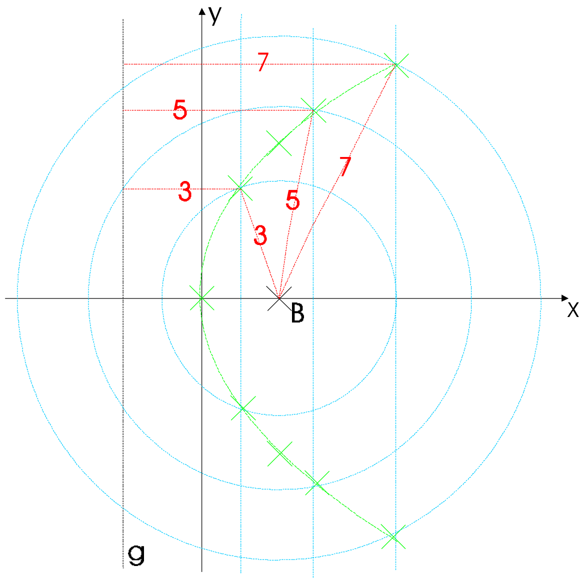
Erste Annahme: Ein Kreis erfüllt die Bedingung: Diese Annahme hat sich als falsch erwiesen, da bei einem Kreis alle Tangenten senkrecht zum Radius sind, und somit jeder Mittelpunktsstrahl wieder in sich selbst reflektiert wird, während alle anderen Strahlen nicht in den Mittelpunkt reflektiert werden können.

Geometrische Konstruktion einer Kurve: Durch Anwendung des Reflexionsgesetzes war es uns möglich, zu jedem einfallendem Strahl eine Tangente zu konstruieren, so daß der reflektierte Strahl durch den Mittelpunkt verläuft. Die so entstehende Kurve legt die Vermutung nahe, daß es sich um eine Parabel handelt. Die Tatsache, daß Satellitenschüsseln auch Parabolspiegel heißen, stützt die Vermutung.

Zu 2.: Konstruktion einer Parabel
Gegeben sei eine Gerade g und ein Punkt B.
Gesucht sind alle Punkte, die von der Geraden g und dem Punkt B den gleichen Abstand haben. g heißt Leitgerade, B heißt Brennpunkt. Konkretes Zahlenbeispiel: g: x=-2 ; B= (2/0)

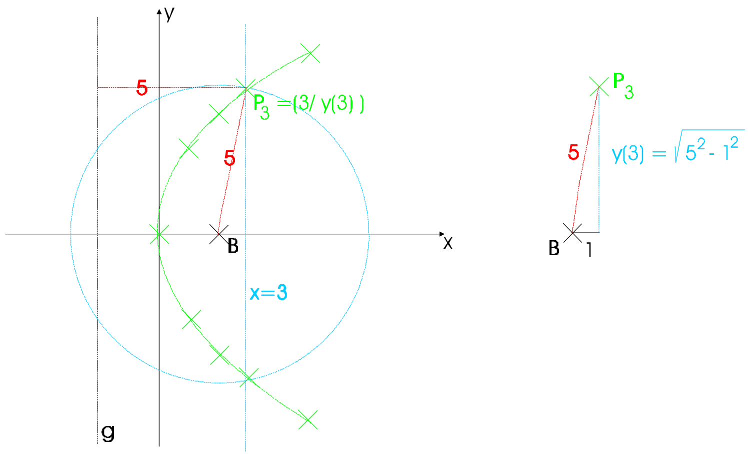


Bei den Punkten (0/0) A= (2/4) und A´= (2/-4) erkennt man in der oben stehenden Skizze direkt, daß sie die Bedingung erfüllen. Weitere Punkte kann man konstruieren, indem man einen Abstand wählt(z.B.3), und dann einen Kreis mit diesem Abstand 3 um B zeichnet und eine Gerade mit diesem Abstand 3 von g zeichnet. Alle Punkte auf der Geraden haben den Abstand 3 von g, alle Punkte auf dem Kreis haben den Abstand 3 von B. Der Schnittpunkt erfüllt beide Bedingungen, er hat also den gleichen Abstand von g und B. In der unten stehenden Skizze findet sich die Konstruktion für die Abstände 3; 5 und 7.

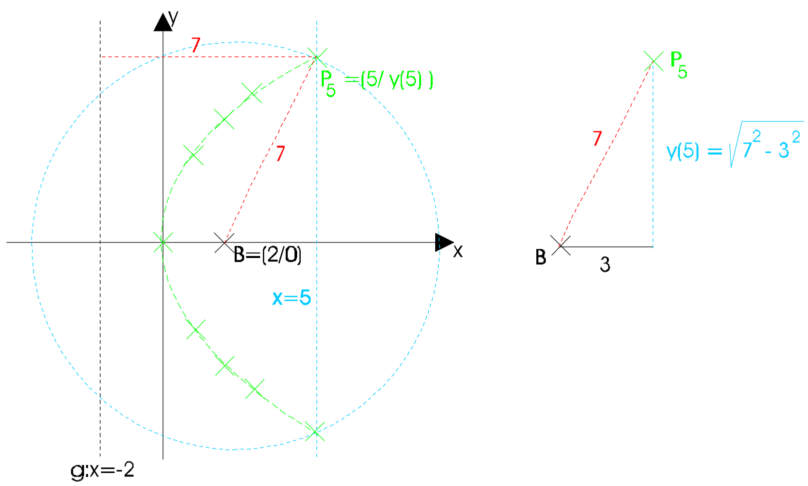


Zu 3.: Nun interessieren die Koordinaten der Punkte. Diese lassen sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

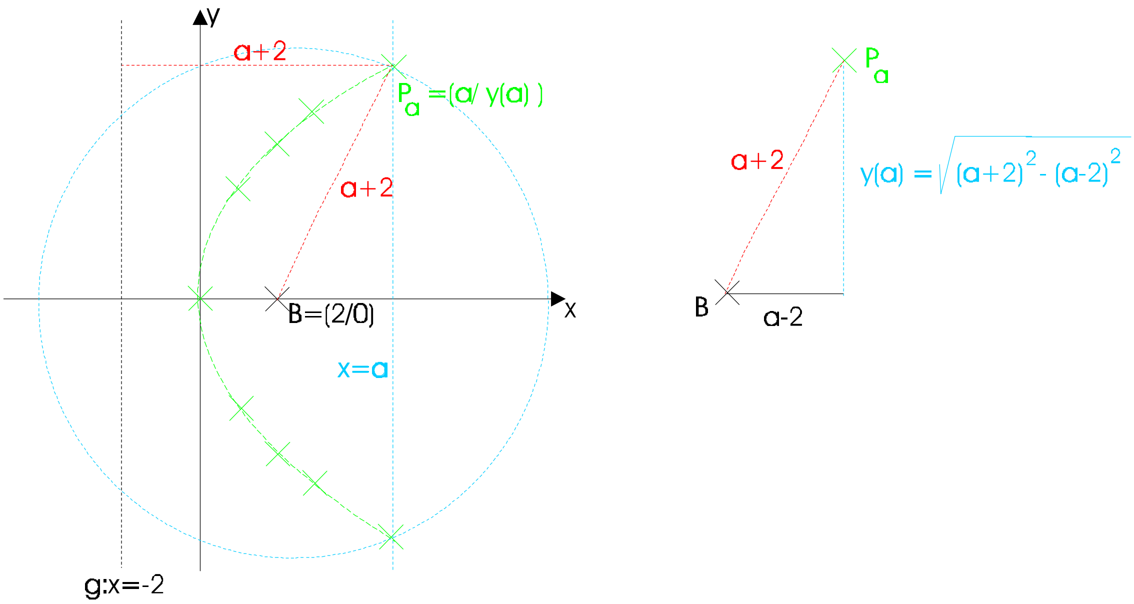
Für den Abstand 5 ergibt sich aus der Zeichnung $P_3 = \left(3 \middle| \sqrt{5^2 - 1^2}\right)$.



Für den Abstand 7 ergibt sich aus der Zeichnung $P_5 = \left(5 \middle| \sqrt{7^2 - 3^2}\right)$.



Für den Abstand a+2 ergibt sich aus der Zeichnung $P_a = \left(a \middle| \sqrt{(a+2)^2 - (a-2)^2} \right)$.

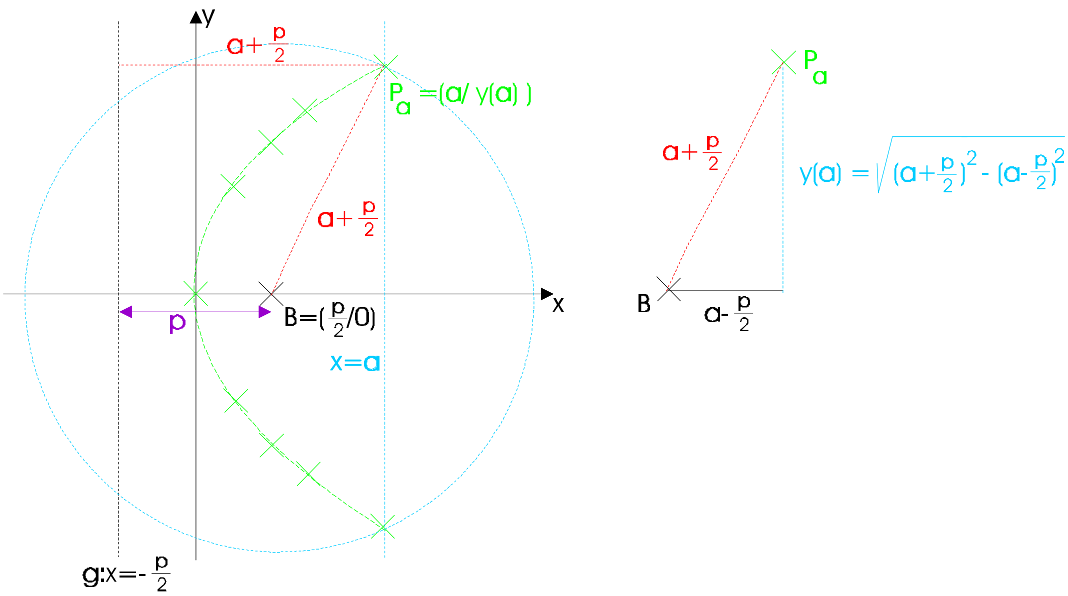


Da $\sqrt{(a+2)^2 - (a-2)^2} = \sqrt{a^2 + 2a2 + 4 - a^2 + 2a2 - 4} = \sqrt{8a}$, folgt $\boxed{P_a = \left(a \middle| \sqrt{8a} \right)}$.

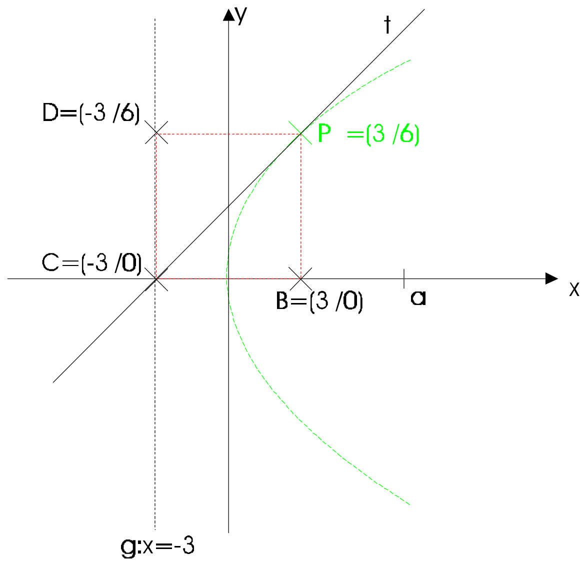
Die durch g: x=-2 und B = (2/0) konstruierte Menge läßt sich also beschreiben durch die Menge aller Punkte (a/b) für die gilt $b = \sqrt{8a}$.

Mathematisch wird diese Menge bezeichnet durch $\boxed{P = \left\{ (a|b) \middle| \, b = \sqrt{8a} \right\} = \left\{ (x|y) \middle| \, y = \sqrt{8x} \right\}}$.

Diese Beschreibung der Punktmenge gilt für g: x=-2 und B=(2/0). Im allgemeinen Fall gibt man den Abstand von B zur Geraden g mit p an. Somit gilt für die Leitgerade g: x=-$\frac{p}{2}$ und für die Koordinaten des Punktes B = ($\frac{p}{2}$ / 0). Mit folgender Rechnung $\sqrt{\left(a + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{2pa}$ ergibt sich die Punktmenge $\boxed{P = \left\{ (a|b) \middle| \, b = \sqrt{2pa} \right\} = \left\{ (x|y) \middle| \, y = \sqrt{2px} \right\}}$



Zu 4.: Zunächst versuchen wir eine Tangente für einen Spezialfall zu konstruieren. Wir konstruieren daher die Tangente im Punkt (3/6). Nach Konstruktion einiger Hilfslinien, die das Quadrat PBCD ergeben, liegt die Vermutung nahe, dass die Diagonale dieses Quadrates genau die Tangente im Punkt P = (3/6) ist.



Diese Vermutung muß nun bewiesen werden. Wir werden zwei verschiedene Beweise dazu führen.

Weg 1: 1.: Aufstellen der Tangentengleichung
2.: Gleichsetzen dieser Gleichung mit der Gleichung der Parabel
3.: Bestimmung von Schnittpunkten
4.: Wenn die Gerade t wirklich eine Tangente ist, so muß sich genau ein Schnittpunkt ergeben. dieser muß die Koordinaten (3/6) haben

Zu 1.: Tangenten sind immer Geraden. Sie haben daher grundsätzlich die Form y= mx + n, wobei m die Steigung ist, die durch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnet wird. in unserem Fall ergibt sich mit den beiden Punkten der Geraden P=(3/6) und C=(-3/6): $m = \frac{6-0}{3-(-3)} = 1$. n ist gleich 3, wie man aus der Symmetrie des Quadrates erkennt. Es ergibt sich also t: y= x + 3.

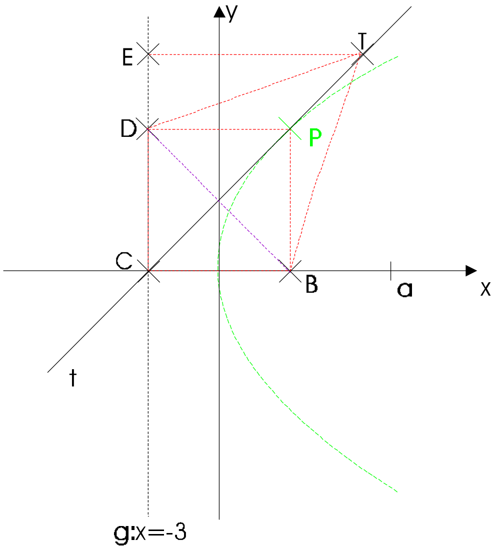
Zu 2.: Wir suchen die Punkte, die sowohl die Gleichung y= x+3 als auch die Gleichung $y = \sqrt{12x}$ erfüllen. Da es sich in beiden Gleichungen also um die gleichen Werte x und y handelt, setzen wir sie gleich:

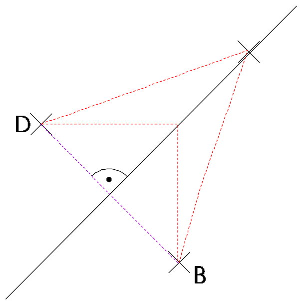
Zu 3.:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{12x} = x + 3 \\
\Leftrightarrow\ & 12x = (x+3)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 12x = x^2 + 6x + 9 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = x^2 - 6x + 9 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = (x-3)^2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3
\end{aligned}$$

Zu 4.: Es ergibt sich genau ein Schnittpunkt, nämlich der Punkt P = (3/6). t ist also die Tangente in P.

2. Weg: Der Beweis läßt sich auch geometrisch führen. Dazu kann man die Eigenschaften der Mittelsenkrechten ausnutzen. Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten von BD haben den gleichen Abstand von B und von D. Wir müssen zeigen daß alle Punkte auf t außer dem Punkt P=(3/6) nicht zu der Punktmenge der Parabel gehören können. Sei nun T ein beliebiger Punkt auf t (T≠(3/6)). Dann ist zu zeigen, daß T nicht zu der Punktmenge der Parabel gehört.





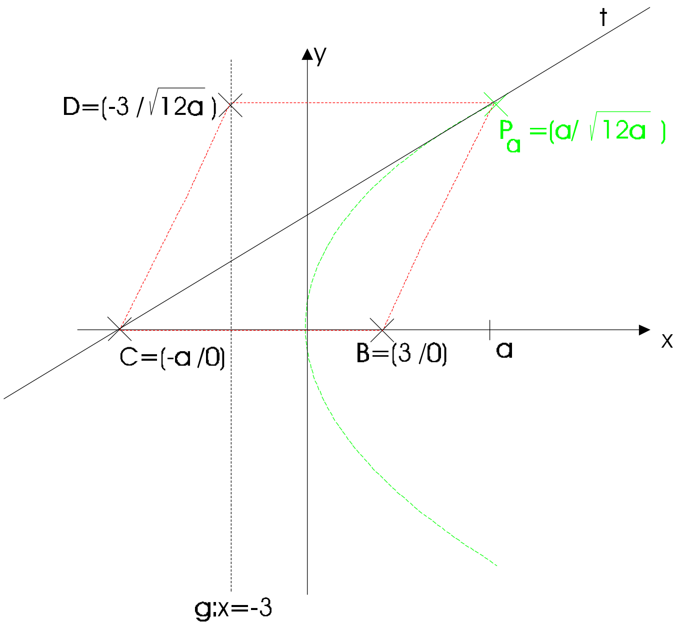
1.: Da t Mittelsenkrechte von BD ist, sind die Strecken $\overline{TB} = \overline{TD}$.

2.: Man erkennt sofort, daß $\overline{TD} \ \phi \ \overline{TE}$

3.: Aus 1. und 2. folgt: $\overline{TB} \ \phi \ \overline{TE}$

4. Wäre T ein Punkt der Parabel, so müssten diese Strecken gleich sein. Es gibt also keinen Punkt außer P=(3/6) auf der Geraden t, der Punkt der Parabel ist. t ist also die Tangente im Punkt P

Nun ist eine bestimmte Tangente konstruiert worden. Wir müssen aber noch Tangenten für die anderen Punkte konstruieren. Daher wählen wir einen beliebigen Punkt $P_a = \left(a \middle| \sqrt{12a}\right)$ und versuchen dort die Tangente zu finden. Aus dem Hilfsquadrat wird nun eine Raute, und die Vermutung liegt nahe, daß auch hier die Tangente durch die Eckpunkte P_a und C verläuft. Es gibt wieder zwei Beweise, die völlig analog zu den beiden oben sind.



Beweis 1:1. Tangentengleichung y= mx + n

$\boxed{m = \frac{\sqrt{12a}}{2a}}$

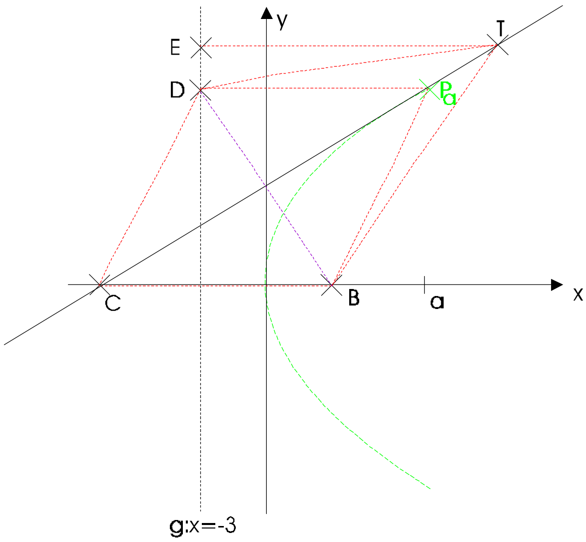
Da der Punkt $\left(a \middle| \sqrt{12a}\right)$ auf der Geraden liegt, gilt: $\sqrt{12a} = \frac{\sqrt{12a}}{2a} \cdot a + n$.

Also gilt $\boxed{n = \frac{\sqrt{12a}}{2}}$.

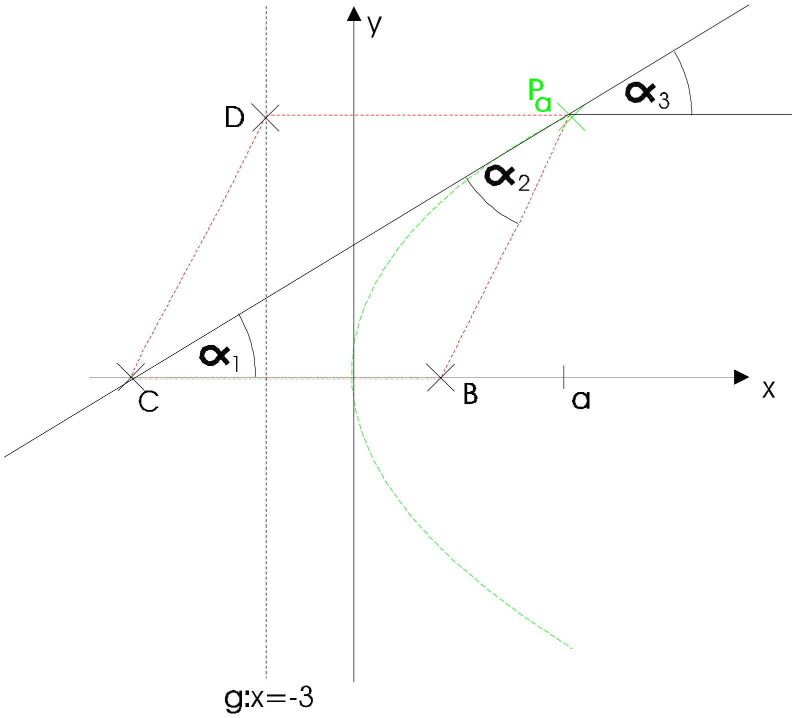
2. Gleichsetzen: $\sqrt{12x} = \frac{\sqrt{12a}}{2a} \cdot x + \frac{\sqrt{12a}}{2}$

3. Schnittpunkt bestimmen: Übungsaufgabe
4. Es ergibt sich x = a. Der Punkt P_a ist also der einzige Schnittpunkt und t ist Tangente in a.

Beweis 2: Der Geometrische Beweis verläuft völlig analog zum Spezialfall und kann wörtlich übernommen werden. Es muß nur eine andere Zeichnung zugrunde gelegt werden.



<u>Zu 5.:</u> Die Tangente der Parabel an der Stelle a hat also - wie unter 4. gezeigt - den Schnittpunkt C = (-a/0) mit der x - Achse.



Wir betrachten nun das Dreieck CBP_a. Es ist, wie man leicht überprüft, ein gleichschenkliges Dreieck. Daher sind die Winkel α_1 und α_2 gleich groß. Die Winkel α_3 und α_1 sind Stufenwinkel, also auch gleich groß. Daraus folgt, dass $\alpha_2 = \alpha_3$ ist.
Damit ist gezeigt, dass alle parallel ankommenden Strahlen in der Brennpunkt B reflektiert werden.